臺北市第 53 屆中小學科學展覽會

作品說明書封面

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：有趣的棋盤遊戲

關 鍵 詞：奇數、擴展、最大最小值

　　我是六年五班胡端傑，這次的作品叫做有趣的棋盤遊戲。在這一個棋盤遊戲中，解題、觀察規律及編寫通識都很困難，不過有了上次的經驗，感覺就還好，像觀察規律、編寫通式等步驟，比起去年，實在變快速了許多。

　　當天去比賽，我一點也不覺得緊張，畢竟我們已經努力了這麼久，只要努力過了，不管得到甚麼名次其實都是最好的安排。最後我們得到了優等，雖然無法參加全國比賽，但我們從經驗中學到了很多。感謝老師及隊友，大家一起努力才有這樣好的成果。

大家好!我是邱煒晴，我擅長畫圖、彈琴和運動，喜歡專心做好一件事，這是我第二次參加數學科展，我們的主題是「有趣的棋盤遊戲」，因為要同時完成三個條件，所以解題方面，十分挑戰性，不過有了上次的經驗，我更能夠自己找出規律，通式的運算也更熟悉。

一開始，我們發現某些棋盤可以使用類似排法完成，所以分為四個系列觀察規律，找出最小值、最大值的規律，再進一步探討長方形棋盤，觀察擴展時的規律，發現有些棋盤的規律產生變化，分析排法後，找出原因，最後綜合前面的研究，探討任意大小棋盤的解法、規律，我覺得最困難的部分是找出規律變化的現象，因為我們思考了很久，又嘗試不同排法，才找出完整的原因，十分不容易!

這次科展比賽我們做好萬全的準備，可是沒有拿到特優，心中難免有些失落，但經過兩年的磨練，我的觀察力也更敏銳，收穫不少，謝謝老師的指導!

我叫張凱甯，是一個活潑但有一點點內向的人。我的綽號是檸檬寶、freefree 和甯甯。是 A 型雙魚座的。

在這次的科展中，我的程度比較比不上兩位學長姐，因此吃了不少苦頭，像是通式寫不出來、無法理解報告中的內容等。比賽當天，雖然是我第一次參加科展，我卻一點都不緊張，因為我知道我們準備的很周全，不怕被問倒。而我也一直堅持一個理念：只要豁出去，就不會緊張了。

我希望將來可以當一位作家，因為我常常三不五時就編一個小故事。我相信自己可以把我的創意加進我的故事裡。現在的獨立研究也是在創作一個短篇小說。

目錄

研究主題：有趣的棋盤遊戲

摘要：本研究從一個有趣的棋盤遊戲出發，先探討棋子擺放的策略，進而從$n \times n$正方形棋盤中，找出滿足遊戲條件的最大最小值規律與排法分析，進而發現規律、排法與邊長的四的倍數有關；接著依據正方形棋盤的經驗與解法，將棋盤擴展為$n \times m$的長方型棋盤，歸納出最大、最小值排法的基本型棋盤與擴展之規律。最後，綜合前述研究結果，進一步提出解決不同大小之棋盤解法策略、最大最小值規律之通式與排法。最後並給予未來研究方向之建議。

壹、　研究動機

我們在書上看到一個有趣的棋盤遊戲，規則如下

圖 1-1-1 是一個由 7 條直線與 7 條橫線所組成的棋盤，標示紅點的地方，均可以放置棋子。這個遊戲是要挑戰用最少的棋子放置棋盤上，並滿足以下三個條件，如圖 1-1-2 所示：

一、棋盤中每一直線上的棋子數必須為奇數；

二、棋盤中每一橫線上的棋子數也必須為奇數；

三、直橫線所形成的每一個方格，其周圍的棋子數也必須是奇數。

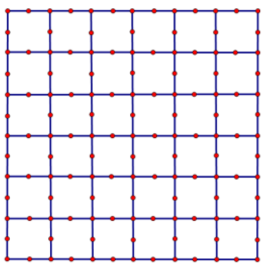


圖 1-1-1

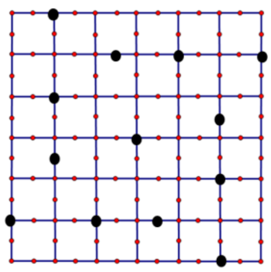


圖 1-1-2

我們嘗試了之後，發現要滿足以上三個條件有相當的難度，且同一個棋盤有好幾種不同的排法，但也激發了我們想要挑戰的決心。因此，我們決定將這個遊戲當作我們的研究主題。本研究主題與數學南一版第十二冊『怎麼解題』單元有關聯。

貳、　研究目的

一、　棋盤遊戲解題策略分析與探討。

二、　探討不同大小正方形棋盤中，滿足遊戲條件之棋子數的最小值與最大值之規律與排法分析。

三、　探討不同大小長方形棋盤中，滿足遊戲條件之棋子數的最小值與最大值之擴展規律與排法分析。

四、　歸納不同大小棋盤之解法。

參、　研究器材

紙、筆、電腦、棋子、Java 程式

肆、　研究過程與方法

一、名詞解釋與符號定義

(一) 棋盤表示：為了方便我們擺放棋子、檢視是否滿足遊戲條件與計算棋子數，報告中的棋子擺放圖示將從圖 4-1-1 改為圖 4-1-2。淺色方格代表可放置棋子的位置點，而深色方格則代表棋盤線條所形成的**方格**，深色圓形點則代表**棋子**。

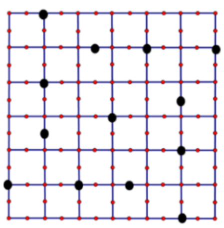


圖 4-1-1

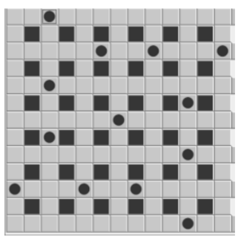


圖 4-1-2

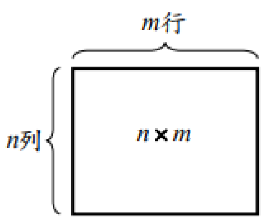


圖 4-1-3

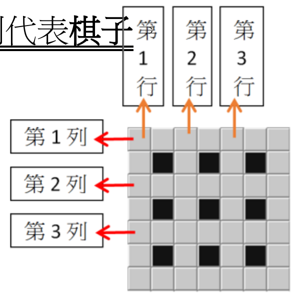


圖 4-1-4

(二) 棋盤邊長數表示法：在這個遊戲中，因為棋子擺放的位置是棋盤的線上，因此我們在定義棋盤邊長數時，以棋盤線條數為邊長數。如7×7的棋盤，則代表直行、橫列的線條各有 7 條，如圖 4-1-2。 正方形棋盤邊長數以 n 表示；長方型棋盤列數以 n 表示，行數以 m 表示，並從棋盤左上角開始表示第一行第一列，如圖 4-1-3、4-1-4。

(三) 擴展：棋盤邊長數，無論是行或是列，<u>**增加 4 條，稱為一次擴展**</u>。

(四) 四格點：如圖 4-1-5 中①號位置，在四個方格中間，一次可接觸四個方格的放置點。

(五) 二格點：如圖 4-1-5 中②、③號位置，一次可接觸兩個方格的放置點。

(六) 單格點：在棋盤周圍，如圖 4-1-5 中④、⑤號位置，一次只接觸一個方格的放置點。

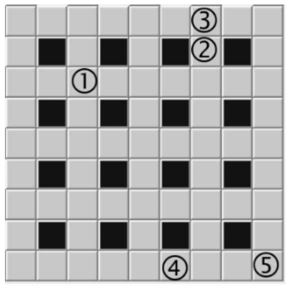


圖 4-1-5

(七) 符號定義：

1. mS_n：在$n \times n$正方形棋盤中，滿足遊戲條件棋子數之最小值。

2. MS_n：在$n \times n$正方形棋盤中，滿足遊戲條件棋子數之最大值。

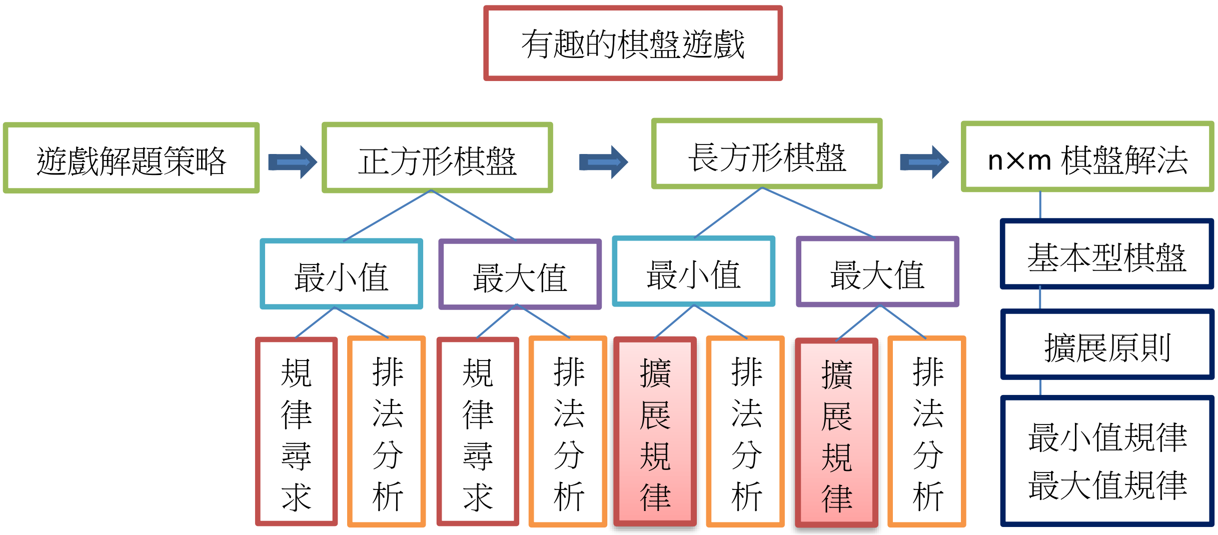
3. mS_{nxm}：在$n \times m$之長方形棋盤中，滿足遊戲條件棋子數之最小值。

4. MS_{nxm}：在$n \times m$之長方形棋盤中，滿足遊戲條件棋子數之最大值。

5. T_n、T_{nxm}：在$n \times n$ 正方形、$n \times m$長方形棋盤中，棋子可以擺放的所有放置點數量。

6. d_n、d_{nxm}：在$n \times n$ 的正方形、$n \times m$之長方形棋盤中，擺滿棋子的最大值後，未擺放棋子的空格數量。

二、研究架構圖



伍、　研究結果

一、遊戲解題策略分析

在這個遊戲中，一開始要挑戰滿足條件的最小值。經過我們實際操作後發現，三個條件需要滿足，最關鍵在於「每一個小方格周圍必須也都要是奇數」這個條件。且滿足條件的最小值排法，並不只有一種。因此，我們嘗試歸納出解題的策略。

(一) 盡量放置四格點

將棋子配置在四格點，每四個小方格只需一顆棋子即可滿足，即可減少使用棋子。如圖 5-1-1，一列使用三顆棋子即可滿足遊戲條件。

(二) 在邊線上，可利用二格點或是單格點控制奇偶數

圖 5-1-2 第一列使用了兩種不同的二格點，第六行的二格點往下一格，可以調整第一列上的棋子數為奇數。

(三) 利用分拆調整奇偶數

圖 5-1-3 中第二列紅框處有兩顆棋子，均放置四格點。我們將其中一個四格點分拆成兩個二格點，如第四列綠框所標示，將原本橫列中的兩顆棋子調整為三顆棋子。

(四) 利用同行同列的棋子交換來調整

圖 5-1-4 紅色虛線框所在的兩行均為偶數，藍色框中所在列為奇數，因此我們可以用同列上的棋子進行交換，順利將兩行的偶數棋子調整為奇數棋子，如圖 5-1-5。

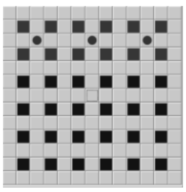
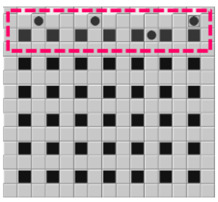
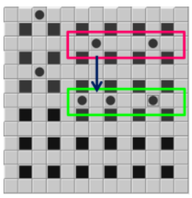
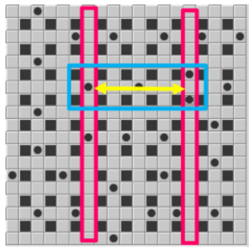
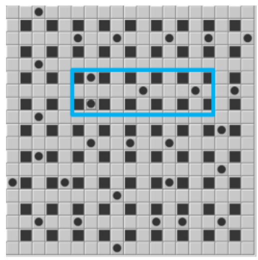
				

圖 5-1-1	圖 5-1-2	圖 5-1-3	圖 5-1-4	圖 5-1-5

結論一：遊戲解題策略

(一) 盡量放置四格點。

(二) 在邊線上，可利用二格點或是單格點控制奇偶數。

(三) 利用分拆調整奇偶數。

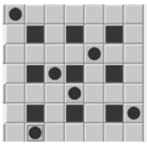
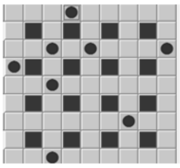
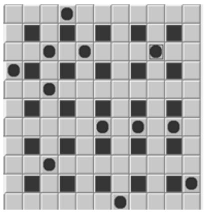
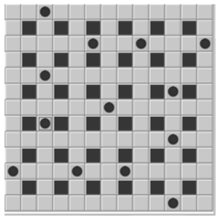
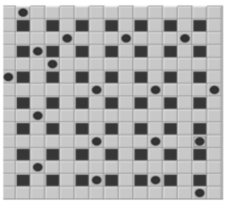
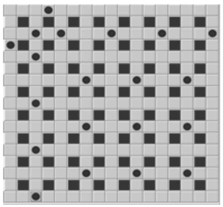
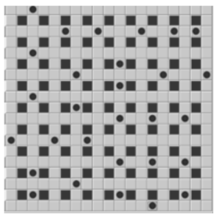
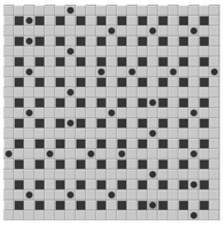
(四) 利用同行或是同列進行棋子交換，改變列或行上的奇偶數。

二、正方形棋盤(nxn)的探討

(一) 滿足條件的最小棋子數

我們用正方形棋盤實際進行排列，找出滿足條件的最小棋子數。4x4-11x11 棋盤的排列結果如表 5-2-1。

表 5-2-1　$4\times4\sim11\times11$ 棋盤棋子擺放結果

4×4	5×5	6×6	7×7
			
8×8	9×9	10×10	11×11
			

我們又更進一步將 12x12 到 23x23 的棋盤最小值都排列出來(實際排列結果詳見附件)，最小棋子數值結果統計如表 5-2-2：

表 5-2-2　$4\times4\sim23\times23$　棋盤最小值結果

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
mS_n	6	8	12	13	18	20	29	31	38	40
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
mS_n	55	57	66	68	89	91	102	104	131	133

從表 5-2-2 的最少棋子數我們無法發現規律。但在實際排列時，我們發現當邊長數

增加 4 時，可以有類似的排列方法。於是我們試著將邊長數分為 4k、4k+1、4k+2、4k+3，這四類來看最小棋子數是否有規律。有以下的發現。

規律尋求

1. 當邊長數 n=4k 時

n	最小值 mS_n 分解	最小值規律
4	$6 = \mathbf{4} \times 1 + 2 = \mathbf{4} \times \frac{\mathbf{4}}{4} + 2$	$S_n = n \times \frac{n}{4} + 2$ $= \frac{n \times n}{4} + 2$ $= \frac{n^2}{4} + 2$ ，$\mathrm{n} \geq 4$
8	$18 = \mathbf{8} \times 2 + 2 = \mathbf{8} \times \frac{\mathbf{8}}{4} + 2$	
12	$38 = \mathbf{12} \times 3 + 2 = \mathbf{12} \times \frac{\mathbf{12}}{4} + 2$	
16	$66 = \mathbf{16} \times 4 + 2 = \mathbf{16} \times \frac{\mathbf{16}}{4} + 2$	
20	$102 = \mathbf{20} \times 5 + 2 = \mathbf{20} \times \frac{\mathbf{20}}{4} + 2$	

2. 當邊長數 n=4k+1 時

n	最小值 mS_n 分解	最小值規律
5	$8 = 2^2 + 4 = \left(\frac{\mathbf{5} - 1}{2}\right)^2 + 4$	$S_n = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 4$ $= \frac{(n-1) \times (n-1)}{4} + \frac{16}{4}$ $= \frac{n^2 - 2n + 17}{4}$ $, n \geq 5$
9	$20 = 4^2 + 4 = \left(\frac{\mathbf{9} - 1}{2}\right)^2 + 4$	
13	$40 = 6^2 + 4 = \left(\frac{\mathbf{13} - 1}{2}\right)^2 + 4$	
17	$68 = 8^2 + 4 = \left(\frac{\mathbf{17} - 1}{2}\right)^2 + 4$	
21	$104 = 10^2 + 4 = \left(\frac{\mathbf{21} - 1}{2}\right)^2 + 4$	

3. 當邊長數 n=4k+2 時

n	最小值 mS_n 分解	最小值規律
6	$12 = 9 + 3 = 3^2 + 3$ (不在規律內)	$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n-2}{2}$ $= \frac{n^2}{4} + \frac{2n-4}{4}$
10	$29 = 25 + 4 = 5^2 + 4 = \left(\frac{\mathbf{10}}{2}\right)^2 + \frac{\mathbf{10} - 2}{2}$	

14	$55=49+6=7^2+6=\left(\frac{\mathbf{14}}{2}\right)^2+\frac{\mathbf{14}-2}{2}$	$=\frac{n^2+2n-4}{4}$，$\mathrm{n}\geq 10$
18	$89=81+8=9^2+8=\left(\frac{\mathbf{18}}{2}\right)^2+\frac{\mathbf{18}-2}{2}$	
22	$131=121+10=11^2+10=\left(\frac{\mathbf{22}}{2}\right)^2+\frac{\mathbf{22}-2}{2}$	

4. 當邊長數 n=4k+3 時

n	最小值 mSₙ 分解	最小值規律
7	$13=9+4=3^2+2\times 2=(\frac{\mathbf{7}-1}{2})^2+\frac{\mathbf{7}+1}{2}$	$S_n=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}\right)$ $=\frac{n^2-2n+1}{4}+\frac{2n+2}{4}$ $=\frac{n^2+3}{4}$， $n\geq 7$
11	$31=25+6=5^2+6=(\frac{\mathbf{11}-1}{2})^2+\frac{\mathbf{11}+1}{2}$	
15	$57=49+8=7^2+8=(\frac{\mathbf{15}-1}{2})^2+\frac{\mathbf{15}+1}{2}$	
19	$91=81+10=9^2+10=(\frac{\mathbf{19}-1}{2})^2+\frac{\mathbf{19}+1}{2}$	
23	$133=121+12=11^2+12=(\frac{\mathbf{23}-1}{2})^2+\frac{\mathbf{23}+1}{2}$	

結論二：**在 nxn 的正方形棋盤中，滿足遊戲條件棋子數之最小值 mS_n 為**

(一) 當 n=4k 時，$mS_n=\frac{n^2}{4}+2$，$n\geq 4$

(二) 當 n=4k+1 時，$mS_n=\frac{n^2-2n+17}{4}$，$n\geq 5$

(三) 當 n=4k+2 時，$mS_n=\frac{n^2+2n-4}{4}$，$n\geq 10$

(四) 當 n=4k+3 時，$mS_n=\frac{n^2+3}{4}$， $n\geq 7$

發現規律後，我們再仔細分析了我們的排法。發現在不同棋盤上，雖然有一樣的最小值，但每個人排法卻不盡相同。

排法策略

(1).利用較小的正方形棋盤，依照排法放置角落或中央，如下圖黃框所標示，向外側擴

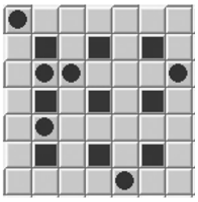
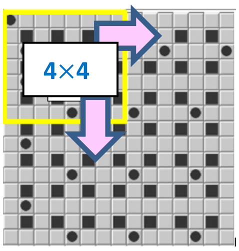
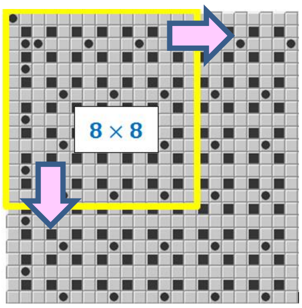
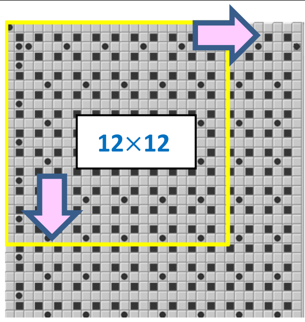
展。

(2).從小棋盤擴展到大棋盤時，主要排法皆以四格點為主，遇到邊緣則改放置二格點。

(3).若行列棋子數為偶數時，將一個四格點分拆為兩個二格點，即可調整為奇數。

排法分析

1. 當邊長數 n=4k 時　《 角落排法 》

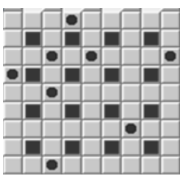
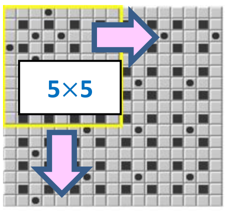
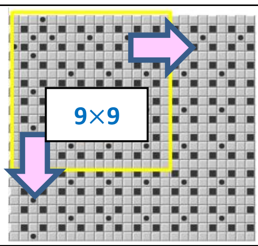
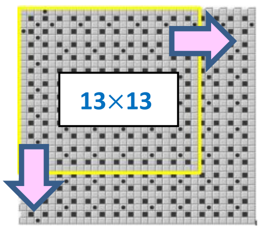
4x4	8x8	12x12	16x16
			

其相鄰棋盤的棋子數關係如下：

$n\times n$	最小值 mS_n
4×4	$mS_4=6$
8×8	$mS_8=mS_4+(\mathbf{4}\times 2)+(2\times 2)$
12×12	$mS_{12}=mS_8+(\mathbf{8}\times 2)+(2\times 2)$
16×16	$mS_{16}=mS_{12}+(\mathbf{12}\times 2)+(2\times 2)$

所以，當 n=4k 時， $mS_{n+4}=mS_n+(\boldsymbol{n}\times 2)+(2\times 2)=\mathbf{2n+4}$ $\quad,\mathbf{n\geq 5}$

2. 當邊長數 n=4k+1 時　《 角落排法 》

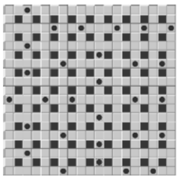
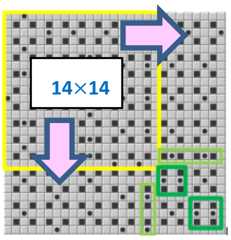
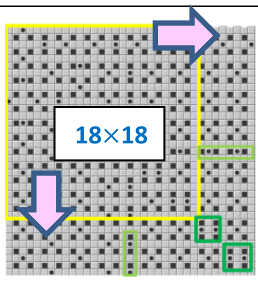
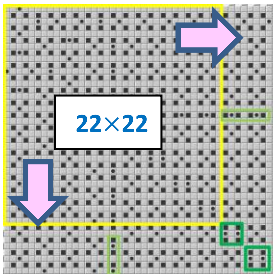
5x5	9x9	13x13	17x17
			

其相鄰棋盤的棋子數關係如下：

$n \times n$	最小值 mSₙ
5×5	mS_5=8
9×9	$mS_9 = mS_5 + (\mathbf{5} - 1) \times 2 + (2 \times 2)$
13×13	$mS_{13} = mS_9 + (\mathbf{9} - 1) \times 2 + (2 \times 2)$
17×17	$mS_{17} = mS_{13} + (\mathbf{13} - 1) \times 2 + (2 \times 2)$

所以，當 n=4k+1 時， $\mathrm{m}S_{n+4} = \mathrm{m}S_n + (\mathbf{n} - 1) \times 2 + (2 \times 2) = \mathbf{2n + 2}$ ，$\mathbf{n \geq 5}$

3. 當邊長數 n=4k+2 時 《 角落排法 》

10x10	14x14	18x18	22x22
			

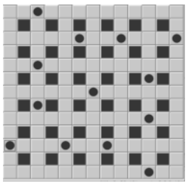
其相鄰棋盤的棋子數關係如下：

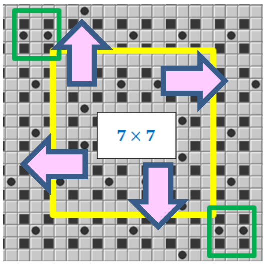
$n \times n$	最小值 mSₙ
10×10	mS_{10}=29
14×14	$mS_{14} = mS_{10} + (\mathbf{10} \times 2) + 2 \times 2 + 2$
18×18	$mS_{18} = mS_{14} + (\mathbf{14} \times 2) + 2 \times 2 + 2$
22×22	$mS_{22} = mS_{18} + (\mathbf{18} \times 2) + 2 \times 2 + 2$

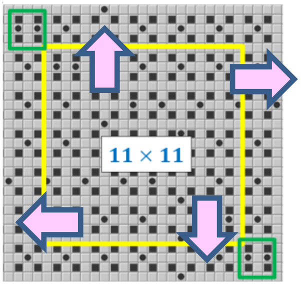
所以，當 n=4k+2 時，$mS_{n+4} = \mathrm{m}S_n + (\mathbf{n} \times 2) + 2 \times 2 + 2 = 2n + 6$ ，$n \geq 10$

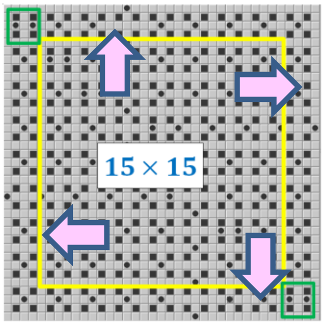
4. 當邊長數 n=4k+3 時 《 中心排法 》

7x7	11x11	15x15	19x19









其相鄰棋盤的棋子數關係如下：

n × n	最小值 mS_n
7 × 7	mS_7=13
11 × 11	$mS_{11} = mS_7 + (\mathbf{7} \times 2) + 2 \times 2$
15 × 15	$mS_{15} = mS_{11} + (\mathbf{11} \times 2) + 2 \times 2$
19 × 19	$mS_{19} = mS_{15} + (\mathbf{15} \times 2) + 2 \times 2$

所以，當 n=4k+3 時，$mS_{n+4} = mS_n + (\mathbf{n} \times 2) + 2 \times 2 = 2n + 4$，$n \geq 7$

***結論三：*在 nxn 的正方形棋盤中，滿足遊戲條件之同類型相鄰棋盤 mS 的關係與擴展方式**

(一) 當 n=4k 時，$mS_{n+4} = mS_n + 2n + 4$ ，$n \geq 4$ ，採角落排法。

(二) 當 n=4k+1 時，$mS_{n+4} = mS_n + 2n + 2$ ，$n \geq 5$ ，採角落排法。

(三) 當 n=4k+2 時，$mS_{n+4} = mS_n + 2n + 6$ ，$n \geq 10$， 採角落排法。

(四) 當 n=4k+3 時，$mS_{n+4} = mS_n + 2n + 4$ ，$n \geq 7$ ，採中央排法。

（二） 滿足條件的最大棋子數

我們實際操作滿足條件的最大棋子數。在擺放棋子之前，我們發現如果把棋盤可擺放的點都擺滿，在行列上均為奇數，僅僅在方格四周圍的棋子數為偶數(8 顆棋子)。因此，我們採*反面思考：*即先將全部可擺放的點都擺上棋子後，共需棋子數為 T，試圖拿掉棋子留下最少的空格數量 d，使棋盤中棋子數量滿足遊戲的條件。表 5-2-3 我們整理出棋盤4×4~23×23的**擺滿棋子數 T**、**棋盤空格數 d** 以及**最大棋子數 MS**。

表 5-2-3 4×4~23×23最大棋子數與棋盤空格結果

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T	40	65	96	133	176	225	280	341	408	481
d	4	4	11	12	16	16	29	30	36	36
MS	36	61	85	121	160	209	251	311	372	445
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
T	560	645	736	833	936	1045	1160	1281	1408	1541
d	55	56	64	64	89	90	100	100	131	132
MS	505	589	672	769	847	955	1060	1181	1277	1409

T 值計算方法

擺滿棋子數的計算方法，我們觀察了不同大小的棋盤，直線上可擺放的點數為$(2n-1)$點，共有n條線，為$n \times (2n-1)$。再計算橫線上的點數為$(n-1)$點，共有n條，為$n \times (n-1)$點。

總點數$= [\mathbf{n} \times (\mathbf{2n}-\mathbf{1})] + [\mathbf{n} \times (\mathbf{n}-\mathbf{1})] = \boldsymbol{2n^2 - n + n^2 - n = 3n^2 - 2n}$ 。

d 值規律尋求

仔細觀察後發現棋盤中空格數量也呈現某種規律。我們將邊長數也分為四大類來尋求是否呈現規律，有以下的發現。

當邊長數 n=4k 時

n	d 的分解	d 值規律
4	$4 = 4 \times 1 = 4 \times \frac{4}{4}$	$\mathrm{d} = n \times \frac{n}{4} = \frac{n^2}{4}$ ，$\mathrm{n} \geq 4$
8	$16 = \mathbf{8} \times 2 = \mathbf{8} \times \frac{\mathbf{8}}{4}$	
12	$36 = \mathbf{12} \times 3 = \mathbf{12} \times \frac{\mathbf{12}}{4}$	
16	$64 = \mathbf{16} \times 4 = \mathbf{16} \times \frac{\mathbf{16}}{4}$	
20	$100 = \mathbf{20} \times 5 = \mathbf{20} \times \frac{\mathbf{20}}{4}$	

當邊長數 n=4k+1 時

n	d 的分解	d 值規律
5	$4 = 2 \times 2 = \frac{\mathbf{5}-1}{2} \times \frac{\mathbf{5}-1}{2}$	$d = \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2} = (\frac{n-1}{2})^2$

9	$16 = 4 \times 4 = \dfrac{9-1}{2} \times \dfrac{9-1}{2}$	$= \dfrac{(n-1)\times(n-1)}{4}$
13	$36 = 6 \times 6 = \dfrac{13-1}{2} \times \dfrac{13-1}{2}$	$= \dfrac{n^2-2n+1}{4}$，$n \geq 5$
17	$64 = 8 \times 8 = \dfrac{17-1}{2} \times \dfrac{17-1}{2}$	
21	$100 = 10 \times 10 = \dfrac{21-1}{2} \times \dfrac{21-1}{2}$	

當邊長數 n=4k+2 時

n	d 的分解	d 值規律
6	$11 = 9 + 2 = 3^2 + 2 = \left(\dfrac{6}{2}\right)^2 + \dfrac{6-2}{2}$	$d = \left(\dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{n-2}{2} = \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{n-2}{2}$
10	$29 = 25 + 4 = 5^2 + 4 = \left(\dfrac{10}{2}\right)^2 + \dfrac{10-2}{2}$	$= \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{2n-4}{4}$
14	$55 = 49 + 6 = 7^2 + 6 = \left(\dfrac{14}{2}\right)^2 + \dfrac{14-2}{2}$	$= \dfrac{n^2+2n-4}{4}$,$n \geq 6$
18	$89 = 81 + 8 = 9^2 + 8 = \left(\dfrac{18}{2}\right)^2 + \dfrac{18-2}{2}$	
22	$131 = 121 + 10 = 11^2 + 1 = \left(\dfrac{22}{2}\right)^2 + \dfrac{22-2}{2}$	

當邊長數 n=4k+3 時

n	d 的分解	d 值規律
7	$12 = 3 \times 3 + 3 = \dfrac{7-1}{2} \times \dfrac{7-1}{2} + \dfrac{7-1}{2}$	d $= \dfrac{n-1}{2} \times \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n-1}{2}$
11	$30 = 5 \times 5 + 5 = \dfrac{11-1}{2} \times \dfrac{11-1}{2} + \dfrac{11-1}{2}$	$= \dfrac{n^2-2n+1}{4} + \dfrac{2n-2}{4}$
15	$56 = 7 \times 7 + 7 = \dfrac{15-1}{2} \times \dfrac{15-1}{2} + \dfrac{15-1}{2}$	$= \dfrac{n^2-1}{4}$ ，$n \geq 7$
19	$90 = 9 \times 9 + 9 = \dfrac{19-1}{2} \times \dfrac{19-1}{2} + \dfrac{19-1}{2}$	
23	$132 = 11 \times 11 + 11 = \dfrac{23-1}{2} \times \dfrac{23-1}{2} + \dfrac{23-1}{2}$	

滿足遊戲條件的**棋子數最大值= (全部排滿的棋子數)−(拿掉的棋子數)**，規律如下：

n	最大值 MS=T-d 的規律

4k	$(3n^2-2n)\ -\dfrac{n^2}{4}=\dfrac{12n^2-8n-n^2}{4}=\dfrac{\mathbf{11n^2-8n}}{\mathbf{4}}$
4k+1	$(3n^2-2n)\ -\dfrac{n^2-2n+1}{4}=\dfrac{12n^2-8n-n^2+2n-1}{4}=\dfrac{\mathbf{11n^2-6n-1}}{\mathbf{4}}$
4k+2	$(3n^2-2n)-\dfrac{n^2+2n-4}{4}=\dfrac{12n^2-8n-n^2-2n+4}{4}=\dfrac{\mathbf{11n^2-10n+4}}{\mathbf{4}}$
4k+3	$(3n^2-2n)\ -\dfrac{n^2-1}{4}=\dfrac{12n^2-8n-n^2+1}{4}=\dfrac{\mathbf{11n^2-8n+1}}{\mathbf{4}}$

結論四：在 nxn 的正方形棋盤中，滿足遊戲條件棋子數之最大值 MS_n 為

(一) 當 n=4k 時，$MS_n=\dfrac{\mathbf{11n^2-8n}}{\mathbf{4}}$，n≥ 4

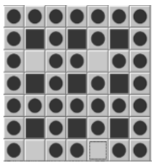
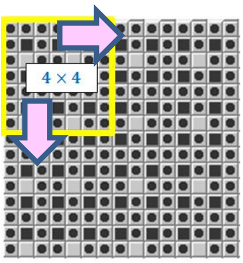
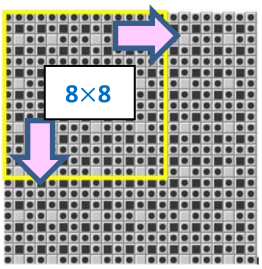
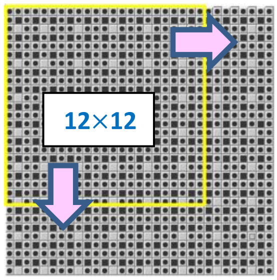
(二) 當 n=4k+1 時，$MS_{4k+1}=\dfrac{\mathbf{11n^2-6n-1}}{\mathbf{4}}$ ，n ≥ 5

(三) 當 n=4k+2 時，$MS_{4k+2}=\dfrac{\mathbf{11n^2-10n+4}}{\mathbf{4}}$ ，n ≥ 6

(四) 當 n=4k+3 時，$MS_{4k+3}=\dfrac{\mathbf{11n^2-8n+1}}{\mathbf{4}}$ ，n ≥ 7

排法分析

1. 當邊長數 n=4k 時　　《 角落排法 》

$\mathbf{4\times4}$	$\mathbf{8\times8}$	$\mathbf{12\times12}$	$\mathbf{16\times16}$
			

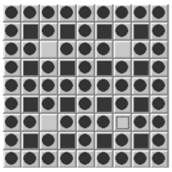
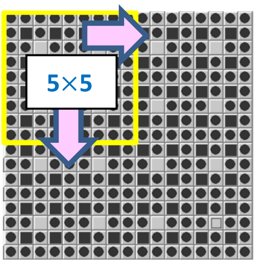
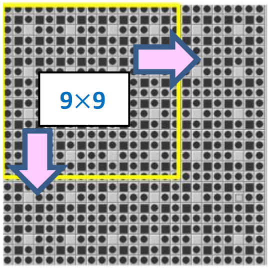
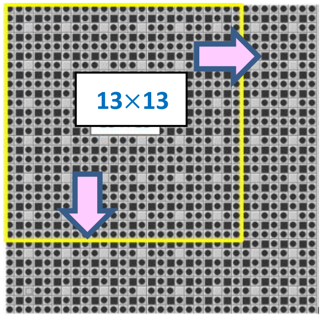
其相鄰棋盤的棋子數關係如下：

$\mathbf{n\times n}$	未擺放棋子的空格數最小值 d_n
$\mathbf{4\times4}$	$\boldsymbol{d_4}$=4
$\mathbf{8\times8}$	$\boldsymbol{d_8=d_4+(4\times2)+(2\times2)}$
$\mathbf{12\times12}$	$\boldsymbol{d_{12}=\mathrm{d}_8+(8\times2)+(2\times2)}$

16×16	$d_{16} = d_{12} + (12 \times 2) + (2 \times 2)$

所以，當 n=4k 時，$d_{n+4} = d_n + (n \times 2) + (2 \times 2) = 2n + 4$　　$, n \geq 4$

2.　當邊長數 n=4k+1 時　　《 角落排法 》

5×5	9×9	13×13	17×17
			

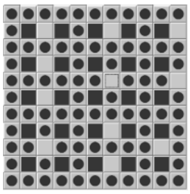
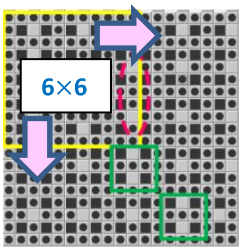
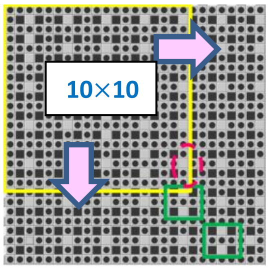
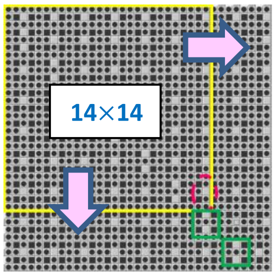
其相鄰棋盤的棋子數關係如下：

$n \times n$	未擺放棋子的空格數最小值 d_n
5×5	$d_5 = 7$
9×9	$d_9 = d_5 + (5 - 1) \times 2 + 2 \times 2$
13×13	$d_{13} = d_9 + (9 - 1) \times 2 + 2 \times 2$
17×17	$d_{17} = d_{13} + (13 - 1) \times 2 + 2 \times 2$

所以，當 n=4k+1，$d_{n+4} = d_n + (n - 1) \times 2 + (2 \times 2) = 2n + 2$　　$, n \geq 5$

3.　當邊長數 n=4k+2 時　《 角落排法 》

6×6	10×10	14×14	18×18

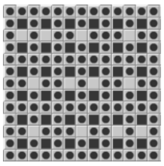
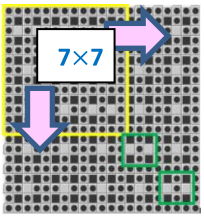
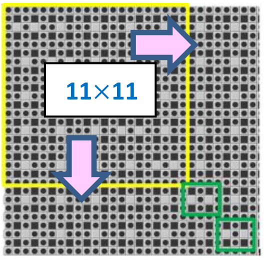
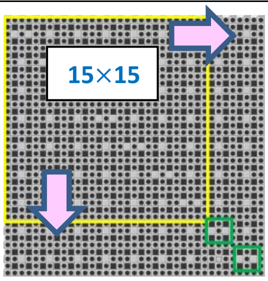
			

其相鄰棋盤的棋子數關係如下：

$\mathbf{n \times n}$	未擺放棋子的空格數最小值 d_n
$\mathbf{6 \times 6}$	$d_6 = \mathbf{11}$
$\mathbf{10 \times 10}$	$d_{10} = d_6 + (\mathbf{6} \times \mathbf{2}) + \mathbf{2} + (\mathbf{2} \times \mathbf{2})$
$\mathbf{14 \times 14}$	$d_{14} = d_{10} + (\mathbf{10} \times \mathbf{2}) + \mathbf{2} + (\mathbf{2} \times \mathbf{2})$
$\mathbf{18 \times 18}$	$d_{18} = d_{14} + (\mathbf{14} \times \mathbf{2}) + \mathbf{2} + (\mathbf{2} \times \mathbf{2})$

所以，當 n=4k+2 時，$d_{n+4} = d_n + (\mathbf{n} \times 2) + 2 + (2 \times 2) = \mathbf{2n + 6}$ $\quad$ $,\mathbf{n \geq 6}$

4. **當邊長數 n=4k+3 時** 《 角落排法 》

$\mathbf{7 \times 7}$	$\mathbf{11 \times 11}$	$\mathbf{15 \times 15}$	$\mathbf{19 \times 19}$
			

其相鄰棋盤的棋子數關係如下：

$\mathbf{n \times n}$	未擺放棋子的空格數最小值 d_n
$\mathbf{7 \times 7}$	$d_7 = \mathbf{12}$
$\mathbf{11 \times 11}$	$d_{11} = d_7 + (\mathbf{7} \times \mathbf{2}) + \mathbf{2} \times \mathbf{2}$
$\mathbf{15 \times 15}$	$d_{15} = d_{11} + (\mathbf{11} \times \mathbf{2}) + \mathbf{2} \times \mathbf{2}$
$\mathbf{19 \times 19}$	$d_{19} = d_{15} + (\mathbf{15} \times \mathbf{2}) + \mathbf{2} \times \mathbf{2}$

所以，當 n=4k+3 時，$d_{n+4} = d_n + (\mathbf{n} \times 2) + 2 \times 2 = \mathbf{2n + 4}$ $\quad$ $,\boldsymbol{n} \geq \mathbf{7}$

*結論五：*在 nxn 的正方形棋盤中，滿足遊戲條件之同類型相鄰棋盤 d 值關係與擴展方式

為

(一)當 n=4k 時，$d_{n+4} = d_n + 2n + 4$　,$n \geq 4$　，採角落排法。

(二) 當 n=4k+1 時，$d_{n+4} = d_n + 2n + 2$　,$n \geq 5$　，採角落排法。

(三) 當 n=4k+2 時，$d_{n+4} = d_n + 2n + 6$　,$n \geq 6$　，採角落排法。

(四) 當 n=4k+3 時，$d_{n+4} = d_n + 2n + 4$　,$n \geq 7$　，採角落排法。

三、　長方形棋盤(n×m)探討

接著，我們思考若棋盤改為長方形時，最大與最小棋子數又會有什麼樣的變化呢？有了正方形棋盤的經驗，我們思考如何從正方形棋盤出發，推算出長方形棋盤的最小最大棋子數。從正方形棋盤我們知道當邊長增加 4 時，可以有系統地擴展下去。但當邊長增加 1 或 2 時，排列方法是否有所不同？或是可以以正方形排法加以延伸呢？於是我們先嘗試從較小的正方形棋盤延伸成長方形棋盤，試著排列看看最少的棋子數，看看是否能發現排列的規律。

(一)、滿足條件的最小棋子數

規律尋求

我們將長方形棋盤最少子數整理如表 5-3-1。 (列 16~24 見工作紀錄)

表 5-3-1　棋盤 4×4~15×23 最小值結果

m n　mS	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5		8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
6			12	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
7				13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
8					18	19	23	23	26	27	31	31	34	35	39	39	42	43	45	45
9						20	25	25	27	28	33	33	35	36	41	41	43	44	49	49
10							29	31	35	37	41	43	47	49	53	55	59	61	65	67
11								31	35	37	41	43	47	49	53	55	59	61	65	67
12									38	39	47	47	50	51	59	59	62	63	71	71
13										40	49	49	51	52	61	61	63	64	73	73
14											55	57	63	65	71	73	79	81	87	89
15												57	63	65	71	73	79	81	87	89

從實際排列的過程中，我們發現最小棋子數的規律與正方形的相似。所以我們將 n 以 k

表示、m 用k’表示，將長寬分為四大類，分別看最小棋子數 mS 增加的情形。

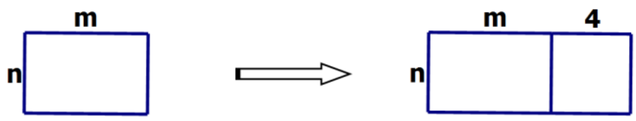
表 5-3-2　棋盤 n×m 擴展 mS 值之變化結果

n \ m	mS	$m = 4k'$					$m = 4k' + 1$				
		4	8	12	16	20	5	9	13	17	21
n=4k	4	6	10	14	18	22	7	11	15	19	23
	8	10	18	26	34	42	11	19	27	35	43
	12	14	26	38	50	62	15	27	39	51	63
	16	18	34	50	66	82	19	35	51	67	83
	20	22	42	62	82	102	23	43	63	83	103
n=4k+1	5	7	11	15	19	23	8	12	16	20	24
	9	11	19	27	35	43	12	20	28	36	44
	13	15	27	39	51	63	16	28	40	52	64
	17	19	35	51	67	83	20	36	52	68	84
	21	23	43	63	83	103	24	44	64	84	104
n=4k+2	6	8	15	23	31	39	9	17	25	33	41
	10	12	23	35	47	59	13	25	37	49	61
	14	16	31	47	63	79	17	33	49	65	81
	18	20	39	59	79	99	21	41	61	81	101
	22	24	47	71	95	119	25	49	73	97	121
n4k+3	7	9	15	23	31	39	10	17	25	33	41
	11	13	23	35	47	59	14	25	37	49	61
	15	17	31	47	63	79	18	33	49	65	81
	19	21	39	59	79	99	22	41	61	81	101
	23	25	47	71	95	119	26	49	73	97	121

n \ m	mS	$m = 4k' + 2$					$m = 4k' + 3$				
		6	10	14	18	22	7	11	15	19	23
n=4k	4	8	12	16	20	24	9	13	17	21	25
	8	15	23	31	39	47	15	23	31	39	49
	12	23	35	47	59	71	23	35	47	59	71
	16	31	47	63	79	95	31	47	63	79	95
	20	39	59	79	99	119	39	59	79	99	119
n=4k+1	5	9	13	17	21	25	10	14	18	22	26
	9	17	25	33	41	49	17	25	33	41	49
	13	25	37	49	61	73	25	37	49	61	73
	17	33	49	65	81	97	33	49	65	81	97
	21	41	61	81	101	121	41	61	81	101	121

m / n / mS		$m=4k'+2$					$m=4k'+3$				
		6	10	14	18	22	7	11	15	19	23
n=4k+2	6	12	19	27	35	43	13	21	29	37	45
	10	19	29	41	53	65	19	31	43	55	67
	14	27	41	55	71	87	27	41	57	73	89
	18	35	53	71	89	109	35	53	71	91	111
	22	43	65	87	109	131	43	65	87	109	133
n=4k+3	7	13	19	27	35	43	13	21	29	37	45
	11	21	31	41	53	65	21	31	43	55	67
	15	29	43	57	71	87	29	43	57	73	89
	19	37	55	73	91	109	37	55	73	91	111
	23	45	67	89	111	133	45	67	89	111	133

發現與歸納



當我們固定 n，擴展 m 時，我們發現最小棋子數有以下的規律

1. 當 n 為$4k$、$4k+1$ 時，若 m 擴展一次，則最小值 mS 增加$4k$。
2. $n=4k+2$、$4k+3$，m 值會依照不同類別，棋子數增加規律也將有所不同。

    (1) 當$n=4k+2$、$m=4k'(k'\geq 2)$，$4k'+1(k'\geq 1)$，m擴展一次，mS 增加 4k+4；

    (2) 當$n=4k+3$、$m=4k'(k'\geq 2)$，$4k'+1(k'\geq 2)$，m擴展一次，mS 增加 4k+4；

    (3) 當$(n，m)=(4k+2，4k'+2)(k、k'\geq 2)$、$(4k+3，4k'+3)$時，擴展一次 mS 增加的規律可分為兩種情形討論：

    ① 當$k>k'$，當 m 擴展一次，mS 增加$4k+2$。

    ② 當$k\leq k'$，當 m 擴展一次，mS 增加$4k+4$。

3. $n=4k+2$，$m=4k'+3$時，m 擴展一次 mS 增加的規律也可以分為兩種情形：

    (1) 當$k>k'+1$，當 m 擴展一次，mS 增加$4k+2$。

    (2) 當$k\leq k'+1$，當 m 擴展一次，mS 增加$4k+4$。

4. $n=4k+3$，$m=4k'+2$時，m 擴展一次 mS 增加的規律也可以分為兩種情形：

(1) 當$k+1>k'$，當 m 擴展一次，mS 增加$4k+2$。

(2) 當$k+1\le k'$，當 m 擴展一次，mS 增加$4k+4$。

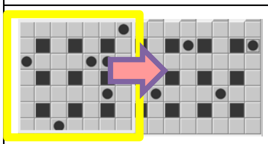
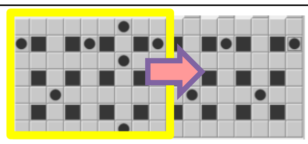
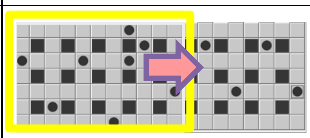
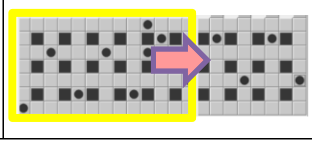
結論六： **在 nxm 長方形棋盤中，固定 n 擴展 m 時，最小棋子數變化(ΔmS)的規律**

<table>
<tr><th>m
n ΔmS</th><th>4k’</th><th>4k’+1</th><th>4k’+2</th><th>4k’+3</th></tr>
<tr><td>4k、4k+1</td><td colspan="4">$4k \quad (k\ge 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4k+2</td><td rowspan="2">$4k+4$
$(k\ge 2)$</td><td rowspan="2">$4k+4$
$(k\ge 1)$</td><td>$4k+2\ \ (1\le k'\le k)$</td><td>$4k+2\ \ (2\le k'+1\le k)$</td></tr>
<tr><td>$4k+4\ \ (1\le k\le k')$</td><td>$4k+4\ \ (2\le k\le k'+1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4k+3</td><td colspan="2" rowspan="2">$4k+4 \qquad (k\ge 2)$</td><td>$4k+2(2\le k'\le k+1)$</td><td>$4k+2(\ 1\le k'\le k)$</td></tr>
<tr><td>$4k+4(2\le k+1\le k')$</td><td>$4k+4(\ 1\le k\le k')$</td></tr>
</table>

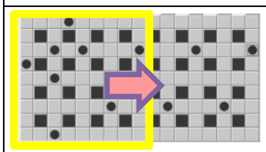
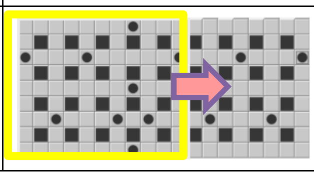
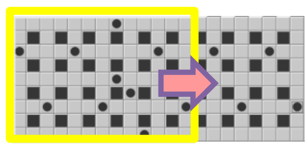
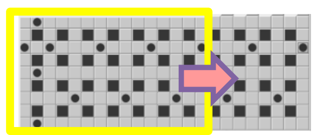
在開始長方形排法前，我們利用正方形的(4×4)、(5×5)、(6×6)、(7×7)排法作為基礎，延伸至較大的棋盤。依據正方形的經驗，以 4 的倍數為一個單位，檢視排法上的規律。

排法分析

1. n=4k 時

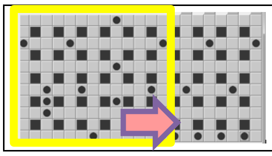
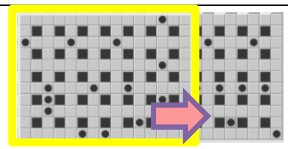
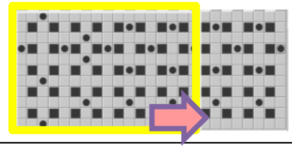
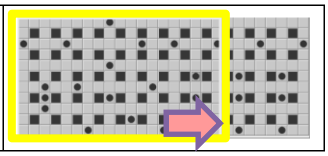
$4\times4\rightarrow4\times8$	$4\times5\rightarrow4\times9$	$4\times6\rightarrow4\times10$	$4\times7\rightarrow4\times11$
			

2. 4k+1 時

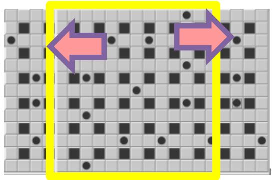
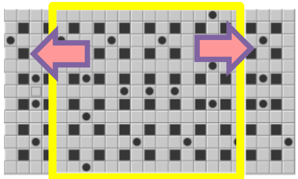
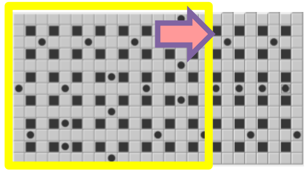
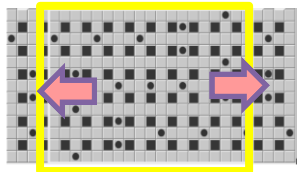
$5\times5\rightarrow5\times9$	$5\times6\rightarrow5\times10$	$5\times7\rightarrow5\times11$	$5\times8\rightarrow5\times12$
			

3. n=4k+2 時

$6\times7\rightarrow6\times11$	$6\times8\rightarrow6\times12$	$6\times9\rightarrow6\times13$	$6\times10\rightarrow10\times14$

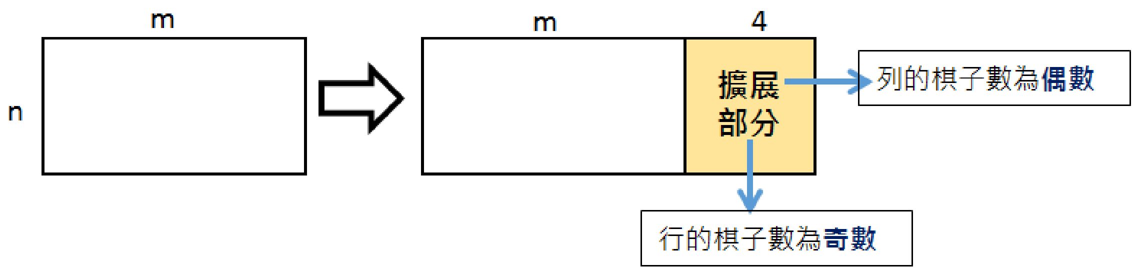
			

4. n=4k+3 時

$7\times7\rightarrow7\times11$	$7\times8\rightarrow7\times12$	$7\times9\rightarrow7\times13$	$7\times10\rightarrow7\times14$
			

發現與歸納

1. 在排列上我們發現，當進行橫向擴展為(m+4)時，增加的棋子數與 n 的大小和類別有關；同理，當若要進行縱向擴展為(n+4)，增加的棋子數則與 m 的大小和類別有關。
2. 奇數加偶數等於奇數，因此橫向擴展時，擴展的部分行上的棋子數為奇數，但列上的棋子數為偶數。因此，橫向擴展一次列的部分剛好增加 2 子，行的部分則視 n 的大小而有不同。



3. 橫向擴展時，當 n=4k+2、4k+3 時，為了要調整橫列奇偶數，每次擴展都要將兩個四格點分拆為兩組二格點。
4. 當$(n，m)=(4k+2，4k'+2)$、$(4k+3，4k'+3)$、$(4k+2、4k'+3)$時，擴展一次 mS 增加的規律與 k、k'的大小有關，以下我們分析為什麼會有這樣的現象產生。

(1) 從<<結論六>>知，(n，m)=(4k+2，4k+2)，而 m≥ n時，以 m 進行擴展一次增加棋子數為 4k+4，且為了調整奇偶數，會產生兩組二格點位於同行。如圖 5-3-1。

(2) 若以 n 再進行一次擴展，在未調整的情況下，也會增加 4k+4 子。並產生兩組二格點於同列上，如圖 5-3-2 紅框所標示。我們嘗試將兩組調整奇偶數用的二格點移至行列交點處，紫色箭頭所標示處，此時發現一組二格點可以減少一顆棋子，而兩組

二格點可減少兩顆棋子，如圖 5-3-2、5-3-3。

由以上可說明為何當$k > k'$時，以 m 擴展增加的子數為 $4k+2$ 而非 $4k+4$。同理，若當$k < k'$，以 n 進行擴展也會有減少兩顆棋子數的現象產生。

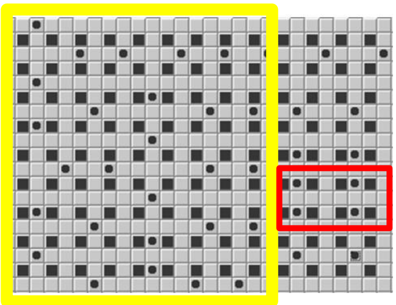


圖 5-3-1

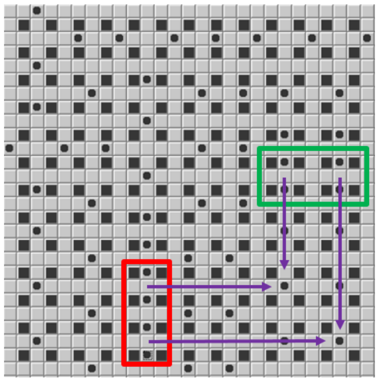


圖 5-3-2

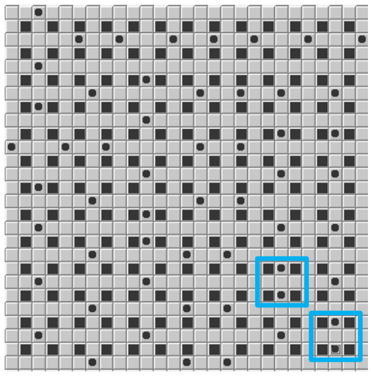


圖 5-3-3

(二) 滿足條件的最大棋子數

與正方形操作相同，我們將棋盤上可以佈棋子的點全部擺滿後，計算全部的總棋子數。。從正方形 T 值計算我們可得知長方形棋盤(n×m)的 T 值為$\mathbf{3n \times m - (n + m)}$。接著拿掉最少的棋子，留下空格，達到最大的棋子數。

我們將 d 值結果整理如下表。(列 16~24 見工作紀錄)

表 5-3-4　棋盤 4×4~15×23 之 d 值結果

n \ m (d)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
4	4	4	7	8	8	8	11	12	12	12	15	16	16	16	19	20	20	20	23	24
5		4	8	8	8	8	12	12	12	12	16	16	16	16	20	20	20	20	24	24
6			11	12	15	16	19	20	23	24	27	28	31	32	35	36	39	40	43	44
7				12	16	16	20	20	24	24	28	28	32	32	36	36	40	40	44	44
8					16	16	23	24	24	24	31	32	32	32	39	40	40	40	47	48
9						16	24	24	24	24	32	32	32	32	40	40	40	40	48	48
10							29	30	35	36	41	42	47	48	53	54	59	60	65	66
11								30	36	36	42	42	48	48	54	54	60	60	66	66
12									36	36	47	48	48	48	59	60	60	60	71	72
13										36	48	48	48	48	60	60	60	60	72	72
14											55	56	63	64	71	72	79	80	87	88
15												56	64	64	72	72	80	80	88	88

我們同樣固定 n 值，以 m 進行擴展，將棋盤空格數 d 值，分為四大類製作成表

格，以便我們觀察擴展的 d 值規律變化情形。如表 5-3-5 所示。

表 5-3-5　棋盤 n×m 擴展的 d 值變化

n \ m（d）		$m=4k'$					$m=4k'+1$				
		4	8	12	16	20	5	9	13	17	21
n=4k	4	4	8	12	16	20	4	8	12	16	20
	8	8	16	24	32	40	8	16	24	32	40
	12	12	24	36	48	60	12	24	36	48	60
	16	16	32	48	64	80	16	32	48	64	80
	20	20	40	60	80	100	20	40	60	80	100
n=4k+1	5	4	8	12	16	20	4	8	12	16	20
	9	8	16	24	32	40	8	16	24	32	40
	13	12	24	36	48	60	12	24	36	48	60
	17	16	32	48	64	80	16	32	48	64	80
	21	20	40	60	80	100	20	40	60	80	100
n=4k+2	6	7	15	23	31	39	8	16	24	32	40
	10	11	23	35	47	59	12	24	36	48	60
	14	15	31	47	63	79	16	32	48	64	80
	18	19	39	59	79	99	20	40	60	80	100
	22	23	47	71	95	119	24	48	72	96	120
n=4k+3	7	8	16	24	32	40	8	16	24	32	40
	11	12	24	36	48	60	12	24	36	48	60
	15	16	32	48	64	80	16	32	48	64	80
	19	20	40	60	80	100	20	40	60	80	100
	23	24	48	72	96	120	24	48	72	96	120

n \ m（d）		$m=4k'+2$					$m=4k'+3$				
		6	10	14	18	22	7	11	15	19	23
n=4k	4	7	11	15	19	23	8	12	16	20	24
	8	15	23	31	39	47	16	24	32	40	48
	12	23	35	47	59	71	24	36	48	60	72
	16	31	47	63	79	95	32	48	64	80	96
	20	39	59	79	99	119	40	60	80	100	120
n=4k+1	5	8	12	16	20	24	8	12	16	20	24
	9	16	24	32	40	48	16	24	32	40	48
	13	24	36	48	60	72	24	36	48	60	72
	17	32	48	64	80	96	32	48	64	80	96
	21	40	60	80	100	120	40	60	80	100	120
n=4k+2	6	11	19	27	35	43	12	20	28	36	44
	10	19	29	41	53	65	20	30	42	54	66
	14	27	41	55	71	87	28	42	56	72	88
	18	35	53	71	89	109	36	54	72	90	110
	22	43	65	87	109	131	44	66	88	110	132

n \ d \ m		$m=4k'+2$					$m=4k'+3$				
		6	10	14	18	22	7	11	15	19	23
n=4k+3	7	12	20	28	36	44	12	20	28	36	44
	11	20	30	42	54	66	20	30	42	54	66
	15	28	42	56	72	88	28	42	56	72	88
	19	36	54	72	90	110	36	54	72	90	110
	23	44	66	88	110	132	44	66	88	110	132

發現與歸納

1. 當 n 固定為$4k$、$4k+1$，無論 m 為哪一個類型(k、$k' \geq 1$)，擴增一次 d 值均增加 4k。
2. 固定$n=4k+2$、$4k+3$，m 值會依照不同類別，拿掉棋子數增加規律也將不同。

(1) $n=4k+2$、$4k+3$，$m=4k'$、$4k'+1$時，當 m 擴展一次，d 值增加 4k+4；

(2) $n=4k+2$、$4k+3$，$m=4k'+2$、$4k'+3(k' \geq 1)$時，擴展 d 值增加可分為兩種情形討論：

① 當$k>k'$，當 m 擴展一次，d 值增加$4k+2$。

② 當$k \leq k'$，當 m 擴展一次，d 值增加$4k+4$。

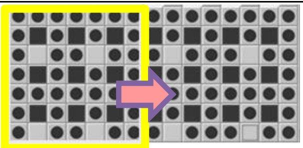
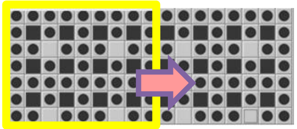
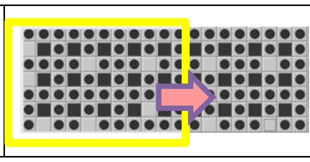
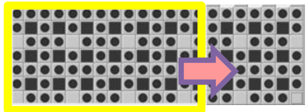
結論七：在 nxm 長方形棋盤中，固定 n 擴展 m 一次，棋盤空格數變化(Δd)的規律

n \ Δd \ m	4k′	4k′+1	4k′+2	4k′+3
4k、4k+1	$4k \quad (k \geq 1)$			
4k+2、4k+3	$4k+4 \quad (k \geq 1)$		$4k+2\ (k'<k)$；$4k+4\ (k \leq k')$	

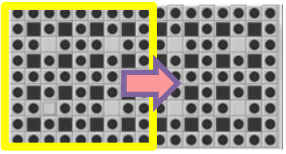
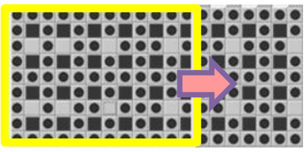
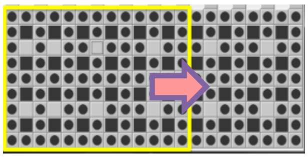
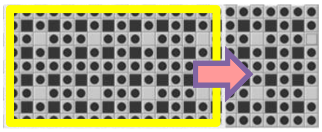
排法分析

1.當 n=4k 時

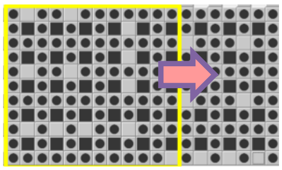
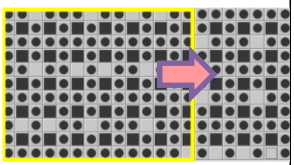
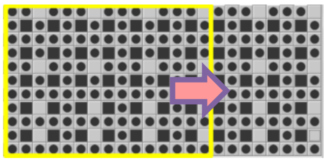
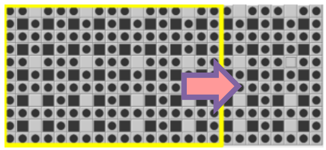
$4 \times 4 \to 4 \times 8$	$4 \times 5 \to 4 \times 9$	$4 \times 6 \to 4 \times 10$	$4 \times 7 \to 4 \times 11$

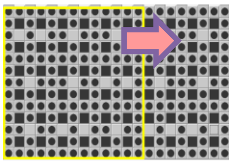
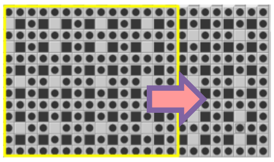
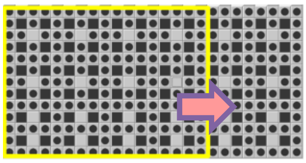
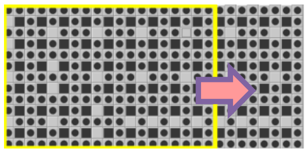
2.當 n=4k+1

$5\times5\rightarrow5\times9$	$5\times6\rightarrow5\times10$	$5\times7\rightarrow5\times11$	$5\times8\rightarrow5\times12$
			

3. 當 n=4k+2

$6\times6\rightarrow6\times10$	$6\times7\rightarrow6\times11$	$6\times8\rightarrow6\times12$	$6\times9\rightarrow6\times13$
			

4.當 n=4k+3

$7\times7\rightarrow7\times11$	$7\times8\rightarrow7\times12$	$7\times9\rightarrow7\times13$	$7\times10\rightarrow7\times14$
			

發現

1. 最大值留下空格的擴展排法與最小值棋子擴展法相同。
2. 當$(\mathrm{n}，\mathrm{m})=(4\mathrm{k}+2，4\mathrm{k}'+2)$、$(4\mathrm{k}+3，4\mathrm{k}'+3)$、$(4k+2$、$4k'+3)$時，擴展一次 d 增加的規律也同樣與 k、k'的大小有關，以下我們就(n，m)=(4k+3，4k'+3)分析為什麼會有這樣的現象產生。
   (1) 如圖 5-3-5，從7×7擴展為7×11，於紅框中在同列拿掉兩個二格點。縱向擴展一次成11×11，未調整的情況下在圖 5-3-6 的綠框中，同行也拿掉兩個二格點。我們將兩組二格點移至紫色箭頭處，如此一組可減少一個空格，兩組則可少兩個空格。排法如圖 5-3-7 藍色框線處。
   (2) 11×11若再進行橫向或縱向擴展，因為已經沒有同行同列的二格點，因此，

擴展規律又回到 4k+4 了。

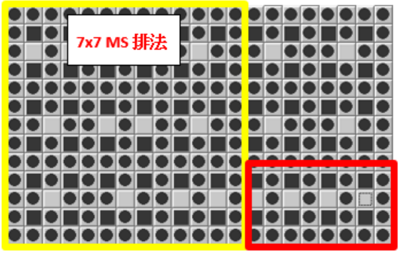


圖 5-3-5

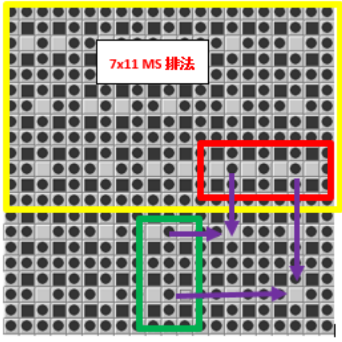


圖 5-3-6

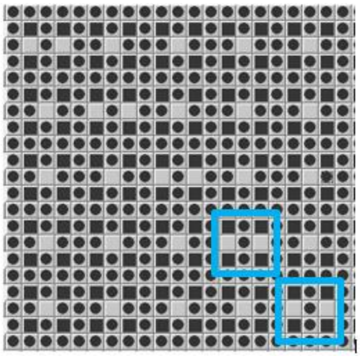


圖 5-3-7

四、探討不同大小棋盤之解法策略

綜合前面研究的結果，我們探討不同大小棋盤的解法策略。首先我們先建立棋盤的基本型，利用基本型加以擴展，應用擴展增加子數的規律，解決不同大小棋盤的排法與棋子數的最大、最小值。

(一) 基本型棋盤

從研究三中我們歸納出幾個不同的基本型棋盤，透過這些基本型棋盤，可以擴展成不同大小的棋盤。

表 5-4-1　基本型棋盤列表

	n \ m	4k′	4k′+1	4k′+2	4k′+3
最小值	4k	4×4	4×5	4×6，$(k=1)$ 8×6，$(k\geq2)$	4×7，$(k=1)$ 8×7，$(k\geq2)$
	4k+1	4×5	5×5	5×6	5×7，$(k=1)$ 9×7，$(k\geq2)$
	4k+2	6×8，$(k'\geq2)$	5×6	6×10，$(k'\geq2)$	6×7，$(k=1)$ 10×7，$(k\geq2)$
	4k+3	7×8，$(k'\geq2)$	7×9，$(k'\geq2)$	7×10，$(k'\geq2)$	7×7
最大值	4k	4×4	4×5	4×6	4×7
	4k+1	5×4	5×5	5×6	5×7
	4k+2	6×4	6×5	6×6	6×7
	4k+3	7×4	7×5	7×6	7×7

發現

在(n，m)=(4k，4’k+2)的棋盤中，由於 4x6 棋盤若直接擴展為 8x6，棋子數會增加 8 顆，但經我們實際排列$mS_{8\times6}$僅比$mS_{4\times6}$多 7 顆棋子。因此，4x6 僅能橫向擴展為 4x(4k’+2)，而

8x6 才是 4kx(4k’+2),k ≥2 的棋盤基本型。同理，7x8、7x9、7x10 棋盤也為 4kx(4k’+3)、(4k+1)x(4k’+3)、(4k+2)x(4k’+3),k≥2 的基本型。

(二) 擴展原則與規律

了解不同大小棋盤的變化規律後，我們歸納出擴展的策略，並計算最大最小值。

1. 先依照棋盤邊長類別以及排法分析，選擇並放置基本型棋盤 A。
2. 橫向擴展，固定列，擴展行為 A+B 棋盤。
3. 縱向擴展，固定行，擴展列為 A+B+C 棋盤。如圖 5-4-1。

4. 分別計算 A+B+C 即可得 mS 與 d 值，得到棋盤的最小值與最大值。

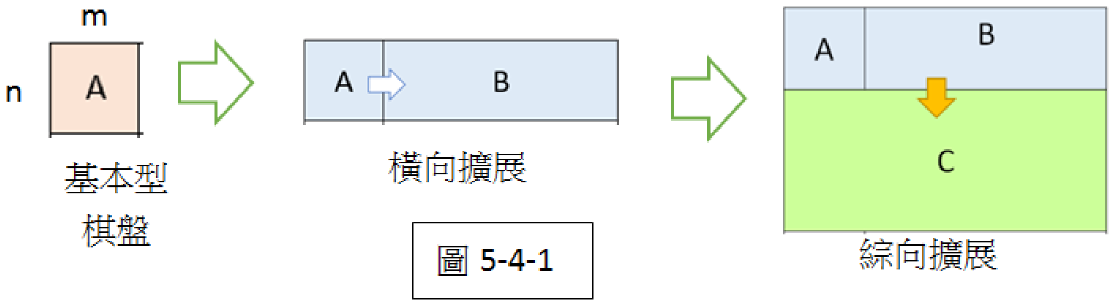


圖 5-4-1

最小值 mS 擴展規律探討

我們把棋盤依照擴展規律變化分為二大類型

《類型一》 僅能橫向擴展(A+B)之棋盤

此類棋盤類型為(4，4k’+2)、(4，4k’+3)、(5，4k’+3)、(6，4k’+3)(k‘≥1)，這一類棋盤僅在橫向擴展時具有規律，若進行縱向擴展，則需要重新排列基本型加以擴展，才能得到最小棋子數。

表 5-4-2 僅能橫向擴展棋盤之最小值基本型

棋盤類型	基本型	A	B	**mS**
(4，4k’+2)	(4，6)	8	4×(k’-1)=4k’-4	**4k’+4**
(4，4k’+3)	(4，7)	9	4×(k’-1) =4k’-4	**4k’+5**
(5，4k’+3)	(5，7)	10	4×(k’-1) =4k’-4	**4k’+6**
(6，4k’+3)	(6，7)	13	8×(k’-1) =8k’-8	**8k’+5**

《類型二》 先橫向再縱向擴展之棋盤

此類型皆可先橫向再縱向擴展。我們依照棋盤邊長類型再區分為兩種情形進行探討。

【*情形 1*】：(n，m)=(4k，4k’)、(4k，4k’+1)、(4k+1，4k’+1)、(4k+1，4k’+2)，(k、k’≥1)；(4k，4k’+2)、(4k，4k’+3) 、(4k+1，4k’+3)，(k≥2，k’≥1)這七種棋盤。擴展使用基本型棋盤與增加棋子數整理如下表。

表 5-4-3 橫向加縱向一階段擴展之最小值棋盤基本型與擴展規律

棋盤類型	基本型	A	B	C	mS
(4k，4k’)	(4，4)	6	4×(k’-1)=4k’-4	4k’×(k-1)=4kk’-4k’	**4kk’+2**
(4k，4k’+1)	(4，5)	7	4×(k’-1) =4k’-4	4k’×(k-1)=4kk’-4k’	**4kk’+3**
(4k，4k’+2)	(8，6)	15	8×(k’-1) =8k’-8	(4k’+4)×(k-2)=4kk’-8k’+4k-8	**4kk’+4k-1**
(4k，4k’+3)	(8，7)	13	4×(k’-1) =4k’-4	(4k’+4)×(k-2)=4kk’-8k’ +4k-8	**4kk’+4k-1**
(4k+1，4k’+1)	(5，5)	15	4×(k’-1) =4k’-4	4k’×(k-1)=4kk’-4k’	**4kk’+4**
(4k+1，4k’+2)	(5，6)	9	4×(k’-1) =4k’-4	(4k’+4)×(k-1)=4kk’-4k’	**4kk’+4k+1**
(4k+1，4k’+3)	(9，7)	17	4×(k’-1) =4k’-4	(4k’+4)×(k-2)=4kk’-8k’	**4kk’+4k+1**

【*情形 2*】：(n，m)=(4k+2，4k’+2)、(4k+3，4k’+3)、(4k+2，4k’+3)這三種棋盤。這三類棋盤先進行橫向擴展時，每次增加的棋子數為 4k+4；但進行縱向擴展時，則需要視 k、k’的大小來分段計算擴展所增加的棋子數。

1. 在(n，m)=(4k+2，4k’+2)、(4k+3，4k’+3)時，第一階段的縱向擴展每次增加棋子數為 4k+2，直到 k=k’為止。如果 k>k’，第二階段擴展增加的棋子數則為 4k+4。
2. 在(n，m)=(4k+2，4k’+3)時，第一階段的縱向擴展每次增加棋子數為 4k+2，直到 k=k’+1 為止。如果 k>k’+1，第二階段擴展增加的棋子數則為 4k+4。

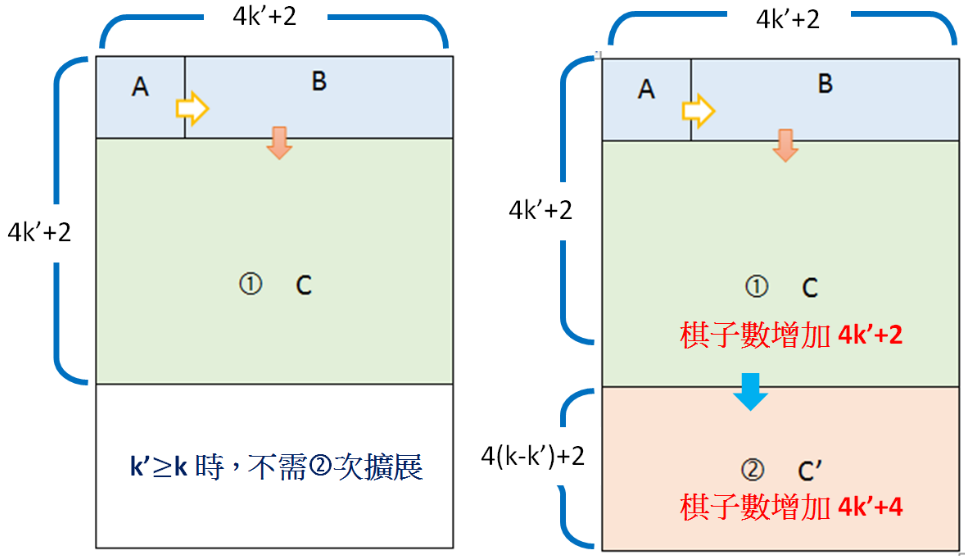


圖 5-4-2　以(4k+2、4k'+2)棋盤為例，說明兩次擴展。

此情形的基本型棋盤、擴展增加棋子數與 mS 整理如下。

表 5-4-4　橫向加縱向二階段擴展棋盤最小值之基本型與擴展規律

棋盤類型	基本型	A	B	C (+C')	mS
(4k+2，4k'+2)	(6，10)	19	8×(k'-2) =8k'-16	2≤k≤k'時， (4k'+2)×(k-1)=4kk'-4k'+2k-2 k>k'≥2 時，①+② ① (4k'+2)×(k'-1)=4k'²-2k'-2 ② (4k'+4)×(k-k') =4kk'-4k'²+4k-4k'	**4kk'+2k+4k'+1，2≤k≤k'；** **4kk'+4k+2k'+1，k>k'≥2**
(4k+3，4k'+3)	(7，7)	13	8×(k'-1) =8k'-8		**4kk'+2k+4k'+3，2≤k≤k'；** **4kk'+4k+2k'+3,k>k'≥2**
(4k+2，4k'+3)	(10，7)	19	12×(k'-1) =12k'-12	2≤k≤k'+1 時， (4k'+2) ×(k-2)=4kk'-8k'+2k-4 k>k'+1≥2 時，①+② ①　(4k'+2)×(k'+1-2) =4k'²-2k'-2 ②　(4k'+4)×(k-k'-1) =4kk'-4k'²+4k-8k'-4	**4kk'+2k+4k'+3，2≤k≤k'+1** **4kk'+4k+2k'+1，k>k'+1≥2**

最大值 MS 擴展規律探討

最大值皆為先橫向後縱向擴展，與最小值相同，可分為兩種情況探討：

【*情形 1*】：(n，m)=(4k，4k')、(4k，4k'+1)、(4k，4k'+2)、(4k，4k'+3)、(4k+1，4k'+1)、(4k+1，4k'+2)、(4k+1，4k'+3)這七種棋盤。擴展使用基本型棋盤與增加棋子數整理如下。

表 5-4-5 橫向加縱向一階段擴展棋盤之最大值基本型與擴展規律

棋盤類型	基本型	A	B	C	d	T-d
(4k，4k’)	(4，4)	4	4×(k’-1)=4k’-4	4k’×(k-1) =4kk’-4k’	4kk’	**44kk’-4k-4k’**
(4k，4k’+1)	(4，5)	4	4×(k’-1) =4k’-4	4k’×(k-1) =4kk’-4k’	4kk’	**44kk’+8k-4k’-1**
(4k，4k’+2)	(4，6)	7	4×(k’-1) =4k’-4	(4k’+4)×(k-1) =4kk’-4k’+4k-4	4kk’+4k-1	**44kk’+16k-4k’-3**
(4k，4k’+3)	(4，7)	8	4×(k’-1) =4k’-4	(4k’+4)×(k-1) =4kk’-4k’+4k-4	4kk’+4k	**44kk’+28k-4k’-3**
(4k+1，4k’+1)	(5，5)	4	4×(k’-1) =4k’-4	4k’×(k-1) =4kk’-4k’	4kk’	**44kk’+8k+8k’+1**
(4k+1，4k’+2)	(5，6)	8	4×(k’-1) =4k’-4	(4k’+4)×(k-1) =4kk’-4k’+4k-4	4kk’+4k	**44kk’+16k+8k’+3**
(4k+1，4k’+3)	(5，7)	8	4×(k’-1) =4k’-4	(4k’+4)×(k-1) =4kk’-4k’+4k-4	4kk’+4k	**44kk’+28k+8k’+5**

【*情形 2*】：(4k+2，4k’+2)、(4k+3，4k’+3)、(4k+2，4k’+3)這三種棋盤，同樣會因為 k、k’大小關係而有兩次擴展的情形出現。整理如下表。

表 5-4-6　橫向加縱向二階段擴展棋盤最大值之基本型與擴展規律

棋盤類型	基本型	A	B	C (+C')	d	T-d
$(4k+2，4k'+2)$	$(6，6)$	11	$8\times(k'-1)$ $=8k'-8$	$k\leq k'$時， $(4k'+2)\times(k-1)$ $=4kk'-4k'+2k-2$	$4kk'+2k+4k'+1$， $k\leq k'$； $4kk'+4k+2k'+1$， $k>k'$	**$44kk'+18k+16k'+7$** **$k'\geq k$** **$44kk'+16k+18k'+7$** **$k\geq k'$**
$(4k+3，4k'+3)$	$(7，7)$	12	$8\times(k'-1)$ $=8k'-8$	$k>k'$時，①+② ①$(4k'+2)\times(k'-1)$ $=4k'^2-2k'-2$ ②$(4k'+4)\times(k-k')$ $=4kk'-4k'^2+4k-4k'$ ①+②= $4kk'+4k-6k'-2$	$4kk'+2k+4k'+2$， $k\leq k'$； $4kk'+4k+2k'+2$， $k>k'$	**$44kk'+30k+16k'+11$** **$k'\geq k$** **$44kk'+16k+30k'+11$** **$k\geq k'$**
$(4k+2，4k'+3)$	$(6，7)$	12	$8\times(k'-1)$ $=8k'-8$		$4kk'+2k+4k'+2$， $k\leq k'$ $4kk'+4k+2k'+2$， $k>k'$	**$44kk'+30k+16k'+11$** **$k'\geq k$** **$44kk'+32k+18k'+11$** **$k'<k$**

結論八：不同類型棋盤之最小值、最大值規律

	n \ m	4k'	4k'+1	4k'+2	4k'+3
最小值	**4k**	**$4kk'+2$**	**$4kk'+3$**	**$4k'+4$，$k=1$** **$4kk'+4k-1$，$k\geq2$**	**$4k'+5$，$k=1$** **$4kk'+4k-1$，$k\geq2$**
	4k+1	**$4kk'+3$**	**$4kk'+4$**	**$4kk'+4k+1$**	**$4k'+6$，$k=1$** **$4kk'+4k+1$，$k\geq2$**
	4k+2	**$4kk'+4k'-1$，** **$k'\geq2$**	**$4kk'+4k'+1$**	**$4kk'+2k+4k'+1$，** **$k'\geq k\geq2$；** **$4kk'+4k+2k'+1$，** **$k>k'\geq2$；**	**$8k'+5$，$k=1$；** **$4kk'+2k+4k'+3$，** **$2\leq k\leq k'+1$；** **$4kk'+4k+2k'+1$，** **$k>k'+1\geq2$**
	4k+3	**$4kk'+4k'-1$，** **$k'\geq2$**	**$4kk'+4k'+1$，$k'\geq2$**	**$8k'+5$，$k'=1$；** **$4kk'+4k+2k'+3$，** **$2\leq k'\leq k+1$；** **$4kk'+2k+4k'+1$，** **$k'>k+1\geq2$**	**$4kk'+2k+4k'+3$，** **$k'\geq k\geq1$；** **$4kk'+4k+2k'+3$，** **$k>k\geq1$；**

最大值	4k	44kk’-4k-4k’	44kk’+8k-4k’-1	44kk’+16k-4k’-1	44kk’+28k-4k’-3
	4k+1	44kk’-4k+8k’-1	44kk’+8k+8k’+1	44kk’+16k+8k’+3	44kk’+28k+8k’+5
	4k+2	44kk’-4k+16k’-1	44kk’+8k+16k’+3	44kk’+18k+16k’+7， k’≥k	44kk’+30k+16k’+11 k‘≥k 44kk’+32k+18k’+11 k’<k
	4k+3	44kk’-4k+28k’-3	44kk’+8k+28k’+5	44kk’+16k+30k’+11 k≥k’ 44kk’+18k+32k’+11 k<k’	44kk’+30k+28k’+19 k’≥k 44kk’+28k+30k’+19 k>k’

陸、結論與討論

一、在這次的研究當中，棋盤遊戲一開始就非常具有挑戰性，在滿足遊戲條件下，要排出最少的棋子數，我們一試再試，期望棋子數能再少一顆、再少一顆。在多次的解決過程中，也歸納出一些策略出來，對我們解題有相當的助益。

二、我們從正方形棋盤出發，找到邊長數與四的倍數有關聯，並藉此繼續延伸至長方型棋盤。有些規律十分清楚明瞭，有些規律卻產生一些變化，也讓我們費了很多時間在尋找規律上。為了破解這些規律變化背後的祕密，我們也花了一番功夫重新排列，才找到解答。最後我們將結論八的規律，以 k=k'代入驗證，發現其正方形的結果與結論二、結論四相符合 。

三、不同類型的棋盤有些可以延伸後加以擴展，有些卻無法，必須改變排法才能進行擴展，這也訓練我們在思考過程中必須保持彈性；部分棋盤的邊長數有不同的限制，在整合時必須非常細心也需要很有耐心，對我們都是很棒的訓練。

四、未來研究與展望

(一)我們這次只解決了最大、最小值，未來也可以設定每行每列棋子數必須同為固定某數，尋求這個數值的最大最小值是否有固定範圍？在排列時我們也發現某些排法具有規律性或對稱性，也可以嘗試尋找特殊排法做為未來研究主題。

(二)將平面棋盤改為立體棋盤，要怎麼排列？最大最小值的規律又如何？也是相當具有挑戰性的研究主題。

柒、參考資料及其他

一、 王擎天、武瑛娟 編著(2008)。玩出聰明左右腦 。 台北縣：博識晴天出版集團。

二、 南一書局企業股份有限公司(2019)。國小數學課本第十二冊。臺北，南一。